**A.A. 2000-2001**

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PALERMO**

**S.I.S.S.I.S.**

**Indirizzo 2. Fisico-informatico-matematico**

**LABORATORI DIDATTICI DI PROBLEM SOLVING E GIOCHI MATEMATICI**

# IL PROBLEM SOLVING E IL GIOCO NELL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA: LE COSTRUZIONI GEOMETRICHE.

*«La convinzione di risolvere ogni problema matematico è un potente incentivo per chi lavora [...]. Noi sentiamo dentro di noi l'eterna voce: c'è un problema. Cerca la sua soluzione»*. [David Hilbert, cit. in Sheila Tobias, 1995]

*«Che la somministrazione di giochi matematici sia didatticamente utile è suggerito dalla stessa immagine degli alunni, inchiodati ai banchi delle Gare di Matematica da una fortissima motivazione. Da cosa ha origine questa esigenza di raccogliere una sfida in un terreno ritenuto difficile e arido come la Matematica?»*. [Tobias S., 1995]

*Docenti* | *di*

***Prof. A. Brigaglia*** | ***Daniela Baldanza***

***Prof. G. E. Perez*** | ***Luigi Sanfilippo***

*Palermo, 28/05/2001*

## *INDICE*

## Introduzione

Il presente lavoro ha per oggetto due approcci metodologici all'insegnamento della matematica, quello del *problem solving* e quello del *gioco*, particolarmente efficaci sia per il raggiungimento di diverse finalità ed obiettivi dell'insegnamento della matematica nella scuola secondaria, sia per il mantenimento di un grado relativamente elevato di interesse e di collaborazione da parte degli allievi, specie nel caso di ragazzi demotivati e svantaggiati.

Ci asteniamo dal dare una definizione rigorosa di problem solving e di gioco matematico. Il problem solving tende alla ricerca di una risposta ad un problema e tale risposta non è necessariamente di tipo numerico (problemi di determinazione): si può, infatti, cercare un oggetto geometrico (problemi di costruzione) o la dimostrazione di una certa proprietà (problemi di dimostrazione), ecc.. Il gioco è nel linguaggio comune qualcosa che piace, che diverte e si associa al recupero della dimensione ludica nello studio della matematica.

I due ambiti sono in larga misura sovrapponibili (un problema può essere posto sottoforma di gioco e un gioco può svolgersi attraverso la risoluzione di uno o più problemi). È per questa ragione che, salvo alcune considerazioni di carattere specifico, in ciò che verrà detto i due termini sono da considerarsi interscambiabili.

Sono state prese in considerazione le costruzioni geometriche, con particolare riferimento a quelle realizzate tramite software di geometria dinamica, intese come "problemi di costruzione"; il fatto di realizzare graficamente un certo oggetto avendo a disposizione un certo numero di strumenti (nel caso dell'uso di un software questi strumenti sono le procedure predefinite, ma in generale possono essere anche la riga, il compasso, il goniometro ecc.) è un problema di costruzione.

L'interesse per la costruzione geometrica nasce, oltre che per questo esercizio di "problem solving" cui essa obbliga, anche per l'importanza che riveste al suo interno la componente dell'intuizione e della creatività, che talvolta la fa assomigliare ad un gioco.

Il lavoro si articola in tre parti: la prima riguarda l'opportunità di privilegiare il gioco e il problem solving nell'insegnamento della matematica in ordine al perseguimento delle finalità e degli obiettivi di insegnamento della matematica individuati nel P.N.I., ma anche per riscoprire un nuovo volto della matematica, per recuperare al suo interno una dimensione ludica e per stimolare e responsabilizzare gli allievi affidando loro la ricerca di un risultato; la seconda illustra alcune linee guida relative alle applicazioni didattiche del problem solving e del gioco, per costruire la conoscenza matematica e per sviluppare capacità di problem solving e di monitoraggio dei processi cognitivi e delle strategie adottate; la terza parte riguarda i metodi di trasformazione delle figure (ed in particolare il metodo di trasformazione per raggi vettori reciproci) per la risoluzione dei problemi di costruzione; la quarta parte illustra, con riferimento alle costruzioni geometriche, l'utilità dei software di geometria dinamica.

# 1. Problem solving e gioco nell'insegnamento della matematica

## 1.1 Problem solving e gioco per il perseguimento delle finalità e degli obiettivi di apprendimento

Gettando un rapido sguardo sulle finalità e gli obiettivi di apprendimento del P.N.I. (Piano Nazionale di Informatica) per il triennio, saltano rapidamente all'occhio alcuni punti sui quali sarebbe, a nostro avviso, opportuno soffermarsi. Occorrerebbe, forse, riflettere sul modo in cui indicazioni formulate in modo così generico e apparentemente così lontane dalla prassi didattica, possano invece essere assunte come punto di partenza per l'individuazione di nuove direttrici di sviluppo per l'intervento didattico; sulla scorta di essi si potrebbe, per certi versi, "reinventare" il modo di fare matematica a scuola, in modo da orientare gli sforzi dei docenti (ma anche degli allievi) all'effettivo raggiungimento di obiettivi fondamentali dell'insegnamento della disciplina, troppo spesso ignorati o volutamente disattesi.

Delle cinque **finalità** elencate nel P.N.I. la terza è:

*«la capacità di utilizzare metodi, strumenti e modelli matematici in situazioni diverse».*

Essa presupporrebbe, da parte degli allievi, di saper disporre in modo autonomo degli strumenti matematici appresi in modo da applicarli ai contesti più disparati; da parte del docente si richiederebbe la contestualizzazione degli argomenti di insegnamento in ambiti applicativi estesi e diversificati e un continuo passaggio dal modello al contesto e viceversa.

Tra i dodici *obiettivi di apprendimento* elencati consideriamone alcuni:

1. *«Sviluppare dimostrazioni all'interno di sistemi assiomatici proposti o liberamente costruiti».*

Non è imparando a memoria le dimostrazioni di alcuni teoremi che si può conseguire una tale abilità; si tratta, infatti, di sviluppare un'autonomia nello sviluppo di semplici dimostrazioni (problemi di dimostrazione) utilizzando consapevolmente gli strumenti logici e matematici necessari; a tal fine può essere utile esercitarsi procedendo a ritroso dalla conclusione del teorema alla necessità dei vari passaggi, fino ad arrivare alle premesse (processo di analisi); una volta acquisita una certa abilità nel procedere "a ritroso", ci si potrà poi cimentare nella risoluzione di qualche problema di dimostrazione.

…

4. *«Affrontare situazioni problematiche di varia natura avvalendosi di modelli matematici atti alla loro rappresentazione».*

Riguardo a questo punto vorremmo porre l'attenzione sul saper *«affrontare situazioni problematiche»* che attribuisce all'insegnamento della matematica il compito di *insegnare a pensare per uno scopo* in luogo di un vago insegnare a ragionare confinato alle sfere dell'astrazione e degli aspetti formali; soffermiamoci però anche su quel *«di varia natura»*, che trova ampio spazio nella matematica della scuola elementare (i problemi sono molto vicini a situazioni reali e concrete e somigliano spesso a giochi o ad aneddoti) ma che, andando avanti nel corso degli studi, si va progressivamente perdendo. La matematica finisce così per sembrare una disciplina sterile, che in sé e solo in sé ha ragione di esistere e che si occupa di oggetti astratti senza presentare legami (apparentemente) con i problemi concreti della realtà.

5. *«Costruire procedure di risoluzione di un problema e, ove sia il caso, tradurle in programmi per il calcolatore».*

Quello di automatizzare la risoluzione di un problema è uno degli aspetti a cui si attribuisce importanza crescente nel problem solving; si tratta cioè di capire se e come il metodo risolutivo può essere reso automatico e trasferito su computer. Questo punto, oltre ad invocare un legame più stretto tra l'insegnamento della matematica e quello dell'informatica, obbliga ad una riflessione, sia da parte dello studente che da parte del docente, sul processo risolutivo adottato nell'approccio ad un problema, nel tentativo di renderlo automatico, più semplice ed economico in termini di operazioni e il più possibile generalizzabile; tutto ciò privilegia l'attività metacognitiva.

Considerazioni analoghe possono essere fatte per i punti 6, 7, 8:

6. *«Risolvere problemi geometrici per via sintetica o per via analitica».*

7. *«Interpretare intuitivamente situazioni geometriche spaziali».*

8. *«Applicare le regole della logica in campo matematico».*

…

Al centro di queste finalità e obiettivi si collocano, ed è facile rendersene conto, il problem solving e il gioco, che, alla luce di tali considerazioni, si configurano come un potente strumento didattico capace di trasformare gli studenti da annoiati ripetitori di definizioni e teoremi e meccanici esecutori di algoritmi in menti capaci di padroneggiare in modo flessibile e creativo gli strumenti matematici. Il problem solving ed il gioco permettono di impreziosire ed arricchire il bagaglio formativo degli allievi e di perseguire obiettivi difficilmente coniugabili con la normale prassi didattica.

## 1.2 Problem solving e gioco per scoprire un nuovo volto della matematica

*Il linguaggio extramatematico*

Uno degli aspetti che rende ostico l'apprendimento della matematica è il linguaggio; la difficoltà risiede in gran parte nel fatto che esso non ammette ambiguità, che appare ermetico e sibillino, lontano da quello comune e dalla realtà che ci circonda, freddo, arido ed astratto.

Piuttosto che avere a che fare con la matematica, può risultare, in generale, più gradevole la lettura di un libro giallo, poiché, malgrado l'eventuale complessità della trama e la difficoltà di cogliere tutti i nessi del ragionamento, per via del linguaggio di cui fa uso esso risulta più vicino al senso comune ed alla realtà che viviamo e capace di coinvolgere emotivamente perché popolato da situazioni e da oggetti che ci sono più familiari e con cui ci troviamo più a nostro agio.

Il gioco matematico recupera in parte questo "gap" tra matematica e realtà poiché predilige il linguaggio extramatematico; in questo modo il gioco estende e valorizza il campo di interesse ed il vocabolario della matematica, popolandola, accanto a numeri e lettere, triangoli, $\varepsilon$ e $\pi$, anche di oggetti, di animali, di aneddoti e di paradossi, gettando un ponte tra gli aspetti rigorosamente teorici e formali e gli ambiti concreti di applicazione.

Il costante riferimento a soggetti e situazioni appartenenti ad un ambito extramatematico si traduce nella contestualizzazione dei contenuti, nella costruzione della conoscenza dal basso, a partire dal contesto applicativo. Il riscontro concreto, applicativo che trovano i concetti matematici nelle applicazioni a problemi reali, di carattere extramatematico, induce a percepire quei concetti non più come aridi e sterili ma come utili e applicabili, se ne comprende l'esigenza e l'importanza.

Questi oggetti extramatematici inoltre colpiscono la fantasia e favoriscono un coinvolgimento della sfera emotiva del soggetto e questo ha un esito positivo sul piano dell'apprendimento e della motivazione.

<u>*L'altra faccia della Luna*</u>

Il problem solving e il gioco sono approcci capaci di rivelare un volto della matematica che rimane celato dietro l'aspetto esteriore della disciplina. "L'altra faccia della Luna", quella che resta nell'ombra, però, è capace di esercitare un fascino capace di appassionare allo studio di una disciplina generalmente considerata arida, difficile e noiosa.

> *«Studiando i metodi per la risoluzione dei problemi, si scopre un altro aspetto della matematica. Sì, la matematica ha due volti: è la scienza severa di Euclide e qualcosa d'altro. Nell'assetto euclideo essa ci appare una scienza sistematica, deduttiva; ma nella pratica si rivela una scienza sperimentale, induttiva. Questi due aspetti sono nati insieme alla stessa matematica».* [Polya G., 1967: 9]

Ciò che generalmente impariamo a scuola è il risultato definitivo, la formalizzazione, ignorando le inquietudini, le idee geniali e i fallimenti che si celano dietro di essi.

Il fatto di dimostrare (processo di sintesi) dà una giustificazione, ma nasconde del tutto il modo in cui si è pervenuti a quella verità; ribaltando il processo (analisi), si procede a ritroso, si accede a quella faccia nascosta del pensiero matematico fatta di tentativi, di errori, di intuizioni, di quelle "brutte copie" estromesse dalla codifica dei risultati che però, paradossalmente, hanno forse molto più da insegnare.

Riflettiamo su un pensiero di René Descartes contenuto nella sua *Regola Quarta per la guida dell'intelligenza*:

> *«Quando applicai per la prima volta la mente alla matematica […] dedicai un'attenzione particolare all'aritmetica e alla geometria […]. Mi sembrava però che* [gli autori] *non rendessero sufficientemente chiaro alla mente stessa perché queste cose siano così e in che modo essi le avevano scoperte. Di conseguenza non mi sorprendeva che molte persone, anche intelligenti e dotte, dopo aver gettato uno sguardo su queste scienze, le avessero o abbandonate come vane e infantili o, considerandole molto difficili e complesse, si scoraggiassero fin dall'inizio del loro studio. […] Ma quando successivamente riflettei su come potesse essere che i più antichi cultori della filosofia nelle epoche passate si rifiutassero di ammettere allo studio della sapienza chi non fosse versato nelle matematiche […], fui confermato nel mio sospetto che essi avessero conoscenza di una specie di matematica assai diversa da quella che ha corso nel nostro tempo».* [Curcio L., 1992: II]

### 1.3 L'elemento ludico e la motivazione: quando il problema matematico può diventare gioco

Un aspetto fondamentale relativo al problem solving ma anche, molto di più, al gioco, è quello del recupero della motivazione allo studio della matematica; in questo modo essa può rendersi "appetibile" non solo a quei quattro o cinque allievi che "sguazzano" volentieri tra le formule, ma a tutti, anche a quelli handicappati o svantaggiati.

A proposito del gioco matematico Gabriele Lolli nella sua opera *Il riso di Talete* scrive:

> *«Questo tipo di matematica è seria e piena di legittimità, tanto è vero che su di essa si può basare una proposta didattica, e una delle più sensate, che ha tanti sostenitori nei più diversi tempi e contesti [...] I giochi non sembrano diversi dai tradizionali esercizi,*

*se non forse perché sono di tipo più logico e linguistico e meno numerico, in generale, e questo argomento gioca tutto a loro favore. La differenza rispetto agli esercizi è che divertono, e non è cosa da poco [...] in primo luogo rappresentano una sfida, e secondariamente la soluzione di solito presenta un elemento di sorpresa. La sorpresa consiste o nel fatto che una risposta proprio ci sia, o nel fato che la risposta è contraria a ciò che ci si attende. Questi aspetti avvicinano i giochi ad un altro fenomeno importante [...] che è quello dei paradossi».* [Gabriele Lolli, cit. in Sheila Tobias, 1995]

La sorpresa, il paradosso, il risultato inatteso sono elementi di stimolo per l'attività cognitiva, sono un po' il gioco di prestigio di cui cerchiamo il trucco.

### 1.4 La responsabilità del risultato e la motivazione: problem solving e gioco come situazione a-didattica

Cimentandosi su un problema o un gioco e risolvendolo l'allievo cessa di essere soggetto passivo per diventare il protagonista di un processo mentale, lo scopritore, l'inventore della soluzione; questo influisce notevolmente sulla sua motivazione, oltre che sul livello di attenzione e sulla qualità dell'apprendimento. Affidando un problema o un gioco agli allievi, l'insegnante cede loro la responsabilità di un processo, di una situazione, permette cioè la *devoluzione* della situazione (situazione a-didattica):

*«In una situazione a-didattica l'insegnante, attraverso un insieme di condizioni che permettono all'allievo di appropriarsi della situazione, permette una **devoluzione** della situazione. La devoluzione consiste non soltanto nel presentare all'allievo il gioco al quale l'insegnante vuole che egli partecipi, ma anche nel fare in modo che l'allievo si senta responsabile, nel senso della conoscenza e non della colpevolezza, del risultato che egli deve cercare. La devoluzione fa appello alle motivazioni dell'allievo, il quale […] deve ricercare le strategie migliori che gli permettono di vincere. In conclusione la* devoluzione *è l'atto attraverso il quale l'insegnante fa accettare all'allievo la **responsabilità** di una **situazione di apprendimento (a-didattica)** o di un problema e accetta lui stesso le conseguenze di questo transfert».* [Spagnolo F., 1998]

In una situazione a-didattica, quindi, l'alunno diventa responsabile del processo, del metodo di risoluzione. Ciò che, infatti, caratterizza il problem solving ed il gioco rispetto ai tradizionali esercizi è l'assenza di un algoritmo definito o di uno schema di comportamento; quello che si cerca, quindi, non è tanto la soluzione in sé ma il modo per arrivare ad essa, il procedimento risolutivo. Generalmente, invece, facendo uso di formule o algoritmi predefiniti la responsabilità dell'allievo si riduce all'esecuzione accurata e pedissequa.

L'alunno, però, talvolta è disorientato da questa libertà e indeterminazione; per lui è più comoda la classica lezione frontale, la dimostrazione da imparare, l'esercizio con algoritmo risolutivo predefinito, ecc.. Tutto ciò dipende molto dallo stile cognitivo di ciascun allievo: c'è chi preferisce creare, autoregolarsi, stupirsi, scoprire e chi invece cerca una ricetta pronta da eseguire diligentemente e con maggiore garanzia di successo. Da parte del docente è importante da un lato rispettare e valorizzare gli stili individuali, dall'altro impedire che essi si radicalizzino, facendo sì che gli allievi sappiano affrontare le diverse situazioni (anche in relazione alle caratteristiche della prova scritta di matematica agli esami di Stato).

## 2. Linee guida per le applicazioni didattiche

I punti essenziali su cui poggia l'utilizzo in classe del problem solving (e del gioco) possono essere schematicamente così sintetizzati:

1. ***Costruire la conoscenza matematica attraverso la posizione di problemi***. Si può attuare una "didattica per problemi" creando di volta in volta situazioni problematiche, anche sottoforma di gioco, da cui far scaturire le idee matematiche (per esempio posso partire da un problema da cui si possa congetturare il teorema di Talete piuttosto che enunciarlo banalmente); in questo caso il problem solving è un *mezzo*, uno strumento metodologico di cui avvalersi per perseguire gli obiettivi didattici.

2. ***Imparare a risolvere problemi matematici***. L'intervento didattico in questo caso tende a sviluppare negli allievi l'attitudine alla risoluzione dei problemi, in modo cioè da applicare le regole e le idee matematiche a vari contesti; il problem solving diventa così un *fine*, è cioè, esso stesso obiettivo dell'intervento didattico.

   In relazione a ciò acquista particolare importanza:

   a) ***Imparare ad applicare ed adattare strategie risolutive a problemi diversi***. Esistono algoritmi che risolvono un'intera classe di problemi, ma una strategia risolutiva può essere specifica, non generalizzabile; in questo caso è tuttavia possibile che attraverso opportuni adattamenti essa possa essere applicabile a problemi analoghi.

   b) ***Monitorare il processo utilizzato nella risoluzione di un problema e riflettere su di esso***. questo aspetto è relativo alla metacognizione e riguarda la capacità di acquisire consapevolezza e controllo dei processi mentali attivati per arrivare alla soluzione di un problema.

Analizziamo quindi separatamente i due punti.

### 2.1 Problem solving e gioco come risorsa didattica: il metodo dell'analisi

Il problema e il gioco possono essere utilizzati come sorgente da cui far nascere idee per introdurre concetti teorici; non si tratta della applicazione del problema, ma di porre una questione a partire dalla quale possa nascere una congettura.

Il teorema di Talete, ad esempio, ha moltissime applicazioni utilizzabili in questi termini; è cioè possibile far scaturire il teorema da una situazione problematica, come la determinazione dell'altezza di un oggetto inaccessibile. Ad esempio mi chiedo: «È possibile, misurando l'ombra dell'oggetto, risalire alle sue dimensioni?». E chiedo: «Qual è la relazione tra l'ombra e l'oggetto?». Da qui può nascere una congettura a partire dalla quale si può gradualmente arrivare al teorema ed alla sua dimostrazione.

Piuttosto che seguire il tradizionale ordine didattico *top-down* tipico delle dimostrazioni, che lascia in ombra l'aspetto applicativo e il modo in cui nascono i concetti, che procede dai postulati ai teoremi e quindi alle applicazioni, si può partire dal basso, da un caso problematico, risalendo via via ad un'idea rigorosa: in questo modo si attua un approccio costruttivo all'apprendimento della matematica.

Il percorso *down-top* è quello dell'analisi ed è il percorso che tipicamente si segue quando si è alla ricerca della soluzione di un problema (di determinazione, di costruzione, di dimostrazione); una volta definiti i passi di questo percorso esso può essere codificato o eseguito nel senso *top-down* (sintesi).

***Scheda 1*. I processi di analisi e sintesi.**

*«Pappo fu un insigne matematico greco, che pare sia vissuto intorno al 300 d.C. Nel settimo libro del suo trattato* Collectiones*, egli parla di un tipo di studio che chiama* analyomenos. *Possiamo tradurre questo vocabolo "analisi preziosa", oppure "arte di risolvere i problemi", oppure anche "euristica" […].*

*L'euristica è, in poche parole, un particolare tipo di scienza utile a coloro che, dopo avere studiato gli elementi fondamentali della matematica, desiderano acquistare una certa abilità a risolvere i problemi; questo è il suo unico impiego. È dovuta essenzialmente a tre costruttori: Euclide, l'autore degli* Elementi*, Apollonio da Perge e Aristeo il Vecchio. Essa insegna i procedimenti di analisi e di sintesi.*

*Nell'analisi, si parte da ciò che si vuole ottenere e lo si suppone noto; da tali premesse, si deducono delle conseguenze e, da queste, altre deduzioni, finché si perviene ad un punto che può essere assunto quale punto di partenza per la sintesi. Quindi, nell'analisi, si avanza l'ipotesi che ciò che si chiede di fare sia già stato eseguito (ossia sia già stato determinato quello che si deve calcolare, oppure sia già stato dimostrato quello di cui si vuole provare la validità o la falsità). L'indagine procede dal risultato a cui si vuole pervenire; poi si risale via via da ogni deduzione a quella che la precede, finché, risalendo di deduzione in deduzione, si perviene a qualche informazione già nota oppure già dimostrata valida. Questo procedimento è detto analisi oppure risoluzione a ritroso, oppure ragionamento regressivo.*

*Invece, nella sintesi, invertendo l'ordine dei passaggi del procedimento precedente, si parte dal punto in cui si è giunti alla fine dell'analisi, da ciò che risulta già noto oppure già dimostrato valido. Di qui, si deriva il risultato […]. Questo procedimento dicesi sintesi, oppure risoluzione costruttiva, oppure ragionamento progressivo.*

*L'analisi, poi, è di due tipi; si ha analisi dei "problemi di dimostrazione" che serve a stabilire la validità dei teoremi e si ha l'analisi dei "problemi di determinazione" che serve a trovare l'incognita».* [Polya G., 1967: 144]

«Illustrazione di carattere non matematico. *Un uomo primitivo deve attraversare un torrente […]. Ecco che l'attraversamento del torrente diviene l'oggetto di un problema; "attraversare il torrente" è l'incognita x del problema iniziale. Quell'uomo si ricorda, ad un tratto, di avere superato dei corsi d'acqua camminando sul tronco di un albero caduto di traverso tra le due rive opposte; allora si guarda attorno, alla ricerca di un comodo albero abbattuto che diviene la nuova incognita y. Lungo i margini del torrente si elevano moltissime piante dal grosso fusto, ma nessuna di esse giace a terra sradicata; il nostro uomo primitivo, logicamente, vorrebbe abbatterne una. Come è possibile farne cadere una attraverso il torrente? Ecco una nuova idea, un nuovo problema, una nuova incognita; in che modo lanciare un tronco tra due rive opposte?*

*Questa sequenza di idee potrebbe dirsi analisi, secondo la terminologia di Pappo […]. Quale sarà poi la sintesi? La traduzione in atto delle idee. L'ultimo stadio della sintesi sarà camminare sul tronco gettato attraverso le acque del torrente.*

*Nell'analisi e nella sintesi intervengono gli stessi enti, gli stessi oggetti; essi fanno entrare in azione nell'analisi il cervello e nella sintesi i muscoli dell'uomo; l'analisi consta di pensieri, la sintesi di azioni. C'è un'altra differenza: l'ordine degli uni e l'inverso dell'ordine degli altri. L'attraversamento del torrente è il desiderio primo da cui scaturisce l'analisi ed è l'ultima azione con cui si chiude la sintesi».* [Polya G., 1967: 148]

Il metodo di analisi è importante dal punto di vista didattico; sviluppa la logica e la capacità di problem solving; più che un sapere è un saper fare, un modo radicalmente diverso di procedere e di ragionare.

Vi sono anche altri aspetti per cui il problem solving e il gioco costituiscono una risorsa didattica:

- **La funzione positiva dell'errore**, evidenziatore di ostacoli epistemologici. La risoluzione di problemi permette all'allievo di trarre maggiore profitto dagli errori commessi, poiché è curioso di scoprire cosa non ha funzionato nel suo ragionamento; a muoverlo c'è una sfida che aveva lanciato a se stesso nel cercare la soluzione.

- **La possibilità di intervenire sui modelli spontanei dei ragazzi**. I problemi e i giochi possono essere impiegati per far emergere i modelli spontanei e i misconcetti degli allievi; essi possono cioè essere strutturati in modo da evidenziare e nello stesso tempo mettere in crisi i vari misconcetti per poter così intervenire su di essi.
- **L'opportunità di stimolare l'interesse per il pensiero matematico**. Questioni di interesse storico, filosofico, ecc. possono essere presentate sottoforma di problema o gioco; esistono diversi problemi e giochi celebri relativi ad aspetti del pensiero matematico rilevanti dal punto di vista didattico (ad esempio la torre di Hanoi e il principio di induzione).

## 2.2 Problem solving come obiettivo: sviluppare abilità di problem solving

L'attitudine al problem solving è spesso considerata un elemento indicatore del livello di intelligenza: non è un caso che test di intelligenza o attitudinali, test di ingresso, test di selezione del personale da parte di aziende o in sede di concorso, si basino sulla capacità di risolvere problemi; gran parte delle attività di progettazione e di ricerca, inoltre, ma anche moltissime situazioni di vita comune, passano attraverso la risoluzione di una catena di problemi.

Non dobbiamo dimenticare che lo sviluppo ed il potenziamento di tale attitudine è tra gli obiettivi dichiarati dell'insegnamento della matematica e che, da parte dell'insegnante, ignorarlo o trascurarlo pesantemente costituirebbe una grave omissione.

Risolvere i problemi è una questione di abilità vera e propria e qualunque abilità può essere acquisita con l'imitazione e l'esercizio. Per imparare a risolvere i problemi è necessario osservare e imitare come vi riescono altre persone ma si impara a risolvere i problemi soprattutto risolvendoli.

*Sviluppare la flessibilità di approccio:*

Gli approcci ad un problema possono essere di vario tipo (intuitivo, sistematico, algoritmico, parziale per tentativi, per esclusione, ecc.); un individuo può manifestare una propensione per alcune tipologie di approccio piuttosto che per altre e, in relazione alla specificità del problema, un approccio può rivelarsi più idoneo e fruttuoso di un altro. In generale però queste tipologie di approccio costituiscono delle strade alternative ed è importante conoscerle ed appropriarsene per raggiungere una maggiore flessibilità e ricchezza di strumenti da poter utilizzare.

Il fatto di padroneggiare metodi di approccio di tipo diverso confluisce nella *libertà*: solo chi conosce e sa usare approcci diversi è veramente libero di scegliere e di adattarne uno al particolare problema proposto ed alla particolare situazione da affrontare. In alcune situazioni può essere richiesta per esempio una soluzione non necessariamente esatta ma approssimata, oppure (nel caso ad esempio di un test di valutazione) il tempo a disposizione per fornire la risposta può essere molto breve, ecc..

La flessibilità di approccio è importante anche perché nella risoluzione di un problema spesso bisogna mutare più volte il punto di vista, esaminando il problema sotto diversi aspetti; talvolta, ad esempio, la strada imbroccata inizialmente in un secondo tempo può rivelarsi sterile

Questa visione multiapproccio a giochi e problemi si contrappone alla vecchia logica dell'algoritmo predefinito, del "come si fa", e favorisce l'attivazione di facoltà ed inclinazioni diverse e complementari tra loro: intuito, comprensione olistica degli schemi, progettualità, analiticità, tendenza ad algoritmizzare, ecc..

A livello didattico, quindi, è importante da un lato valorizzare e potenziare gli stili e le propensioni individuali e dall'altro arricchire e diversificare il bagaglio di ciascuno, aiutando gli allievi a scoprire ed a utilizzare approcci di tipo diverso. Può essere formativo in tal senso proporre alcuni problemi alla classe e poi, anziché fornire la classica "ricetta" della soluzione, chiedere ad ognuno, anche a chi non è stato in grado di trovare la soluzione, di esplicitare i tentativi che ha fatto e le relative motivazioni.

<u>*Un aiuto discreto: domande guida*</u>

Quando l'insegnante sottopone ai suoi allievi un problema da risolvere deve tener presente due fini principali:

1) aiutare lo studente a risolvere il problema proposto;
2) sviluppare l'abilità dello studente in modo che egli sia in grado di risolvere i problemi che dovrà affrontare successivamente.

Lo studente lasciato da solo davanti ad un problema, potrebbe bloccarsi e non fare progressi; se però al contrario il docente è troppo prodigo di suggerimenti, all'alunno non resterebbe più niente da fare; l'insegnante, quindi, dovrebbe intervenire non troppo né troppo poco, dovrebbe aiutare il ragazzo in modo opportuno, fornendogli l'*input* necessario a procedere autonomamente nella ricerca della soluzione e aiutandolo a porsi le domande "giuste" nei problemi che affronterà in seguito.

Un possibile schema di domande-guida per fornire l'aiuto necessario è quello proposto da George Polya in *Come risolvere i problemi di matematica*:

> *«Per raggruppare opportunamente le domande ed i suggerimenti del nostro schema, distingueremo quattro fasi nello sviluppo del lavoro. Prima: si deve* comprendere *il problema; è necessario conoscere chiaramente cosa sia richiesto. Seconda: si devono scoprire i legami che intercedono fra le varie informazioni, fra ciò che si cerca e i dati, per rendersi conto del tipo di risoluzione e compilare un piano conveniente. Terza: si procede allo sviluppo del piano. Quarta: bisogna esaminare attentamente il risultato ottenuto e procedere alla sua verifica ed alla sua discussione»,* [Polya G., 1967:25].

Le domande indicate da G. Polya seguono questa classificazione in fasi; alcune sono applicabili ai "problemi di determinazione" ma non ai "problemi di dimostrazione" (in problemi di questo tipo intervengono altre domande):

1. *Comprensione del problema*

   - Quali sono i dati?
   - Qual è l'incognita?
   - Ci sono dati superflui? (L'individuazione di eventuali dati superflui può evitare di incorrere nell'errore di utilizzarli nella procedura di risoluzione).
   - Ci sono dati nascosti? (Saper ad esempio se il problema ammette soluzione o se ne ammette una sola, il che può essere espresso velatamente nel testo, è un dato e può essere determinante per la risoluzione del problema).
   - La condizione è sufficiente a determinare l'incognita? Non è sufficiente? È sovrabbondante? È contraddittoria?

2. *Compilazione di un piano*

   - Questo problema è noto?
   - Si è già presentato sotto un aspetto diverso?
   - È noto un problema connesso con questo?
   - Si conosce un teorema che potrebbe essere utile? È possibile sfruttarlo?
   - Si è fatto uso di tutti i dati?

- È possibile individuare problemi ausiliari necessari alla soluzione dell'intero problema? (Si può, ad esempio, procedere alla scomposizione del problema in eventuali classi di sottoproblemi, individuando quindi la necessità di perseguire obiettivi intermedi).

3. *Sviluppo del piano*

- Sviluppando il piano si verifichi ogni passaggio. Si può dimostrarne l'esattezza?

4. *Alla fine*

- Si può verificare il risultato?
- Si può ottenere il risultato in un altro modo?
- Lo si può vedere a colpo d'occhio?

> *«[…] tutto ciò che possono fare tali domande e suggerimenti è procurare all'investigazione un'elasticità sempre scattante. A chi è sul punto di darsi per vinto e di abbandonare ogni ulteriore tentativo di scoperta, essi dovrebbero essere in grado di suggerire un nuovo artificio, un nuovo aspetto ed una nuova variazione del problema, un nuovo incentivo».* [Polya G., 1967: 163]

Queste domande sono di carattere generale e sono quindi applicabili in molti casi; se una domanda rivelerà ripetutamente la sua efficacia è difficile che l'alunno non se ne accorga e tralasci di porsi lo stesso interrogativo in circostanze analoghe.

Può accadere anche che un allievo comprenda alcune domande così bene da essere in grado di porsi da solo la domanda opportuna al tempo opportuno e di condurre a termine autonomamente la corrispondente operazione mentale. Il ragazzo, in altre parole, deve imparare ad entrare dentro il problema con un occhio "esperto", facendo un'accurata analisi della situazione problematica.

L'elenco di domande proposto non è utile soltanto a risolvere il problema, serve a riflettere sulla possibilità di sfruttare procedimenti noti eventualmente adattandoli al problema proposto (punto a) e a monitorare il processo risolutivo riflettendo su di esso (punto b). Per sviluppare capacità di problem solving, infatti, bisogna non solo cercare di trovare la soluzione dei problemi, ma indagare ed esplicitare i motivi che hanno condotto alla scelta della strategia adoperata.

Generalmente, però, anche chi procede in modo corretto non si cura di spiegare in termini precisi il ragionamento fatto, forse spesso non saprebbe neppure farlo. Per esercitare gli allievi a fare questa operazione di automonitoraggio è opportuno che l'insegnante, risolvendo un problema in classe, finga un poco mostrandosi quasi incerto e rivolga a se stesso a voce alta le stesse domande che pone ai ragazzi; gli allievi comprenderanno, così, l'uso corretto di tali domande e suggerimenti e se ne approprieranno. Questa è la tecnica dell'*autoistruzione verbale* e serve a sviluppare la tendenza al controllo della propria attività cognitiva.

# 3. Problem solving e gioco nelle costruzioni geometriche

## 3.1 Problemi di costruzione geometrica: il metodo della trasformazione e l'inversione

Non esiste un metodo generale per la risoluzione di un problema di costruzione, la pratica suggerisce di volta in volta il procedimento più adatto. Molti problemi possono essere rapidamente risolti con il *metodo della trasformazione:* si tratta di risolvere un problema dopo averlo trasformato in un altro la cui soluzione è nota o facilmente determinabile.

Questo metodo si fonda sulle seguenti considerazioni: supponiamo che un problema richieda la costruzione di una data figura, i cui elementi debbano soddisfare certe condizioni; se supponiamo il problema risolto ed applichiamo alla figura una trasformazione opportuna, otterremo una nuova figura. Se, con riferimento alla figura trasformata, il problema di costruzione trova soluzione, applicando ad essa la trasformazione inversa si arriverà alla soluzione del problema proposto.

Le trasformazioni più comunemente usate per la risoluzione dei problemi geometrici sono:

- I movimenti (traslazioni e rotazioni);
- Le simmetrie rispetto ad un punto o rispetto ad una retta (ribaltamenti);
- Le omotetie e le similitudini;
- Le inversioni per raggi vettori reciproci.

Ovviamente bisogna assicurarsi che le proprietà riprodotte sul problema trasformato siano invarianti rispetto alla trasformazione utilizzata e conoscere le relazioni che intercorrono tra le soluzioni del problema originario e quelle del problema trasformato.

Uno dei più potenti metodi di trasformazione è quello dell'*inversione per raggi vettori reciproci*, che trasforma drasticamente le figure e le loro caratteristiche ma, nello stesso tempo, conserva molte proprietà importanti ai fini dei problemi di costruzione.

***Scheda 2*. Il metodo dell'inversione**

Presa una circonferenza di centro *O* e raggio *r*, detta circonferenza di inversione (Fig. 1), ad ogni punto *P* del suo piano si fa corrispondere il punto *P'* della retta *OP*, tale che $OP \cdot OP' = r^2$ (in grandezza e segno). *P* e *P'* si dicono inversi l'uno dell'altro rispetto alla circonferenza di inversione.

Il cerchio di inversione rappresenta una sorta di specchio nel quale il punto *P* si riflette generando la sua immagine *P'* secondo la legge di inversione $OP \cdot OP' = r^2$. Per questo motivo in alcuni software di geometria l'inversione è detta *riflessione rispetto alla circonferenza*.

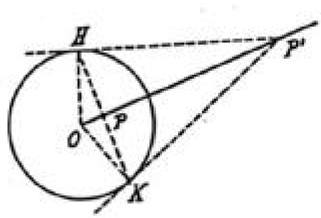


*Fig. 1*

Da questa definizione di inversione discendono alcune sue proprietà fondamentali facilmente dimostrabili:

1. L'inversione trasforma una retta per il centro O di inversione in se stessa.

2. Una circonferenza passante per il centro O si trasforma in una retta non passante per O e, viceversa, una retta non passante per O si trasforma in una circonferenza passante per O:

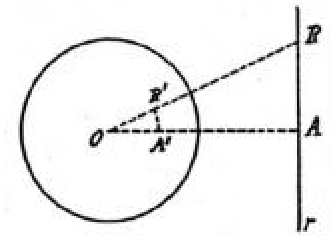


*Fig. 2*

3. Una circonferenza non passante per il centro si trasforma in una circonferenza pure non passante per il centro:

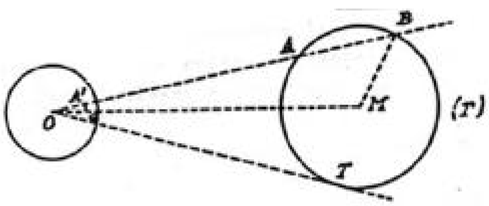


*Fig. 3*

Il metodo dell'inversione risulta particolarmente efficace nella risoluzione di problemi geometrici del tipo:

a) costruire una circonferenza passante per due punti e tangente ad una retta data;
b) costruire una circonferenza passante per due punti e tangente ad un'altra circonferenza data;
c) costruire una circonferenza passante per un punto e tangente a due circonferenze date;
d) costruire una circonferenza tangente a tre circonferenze date.

### 3.2 Il problema dell'*arbelos*

Applichiamo il metodo dell'inversione al cosiddetto "problema dell'*arbelos*" (Fig. 4), che rientra nel caso d) di cui sopra. Si chiede di determinare le circonferenze tangenti alle tre circonferenze date e, iterativamente, le circonferenze tangenti a C1, C2 ed a quelle appena disegnate, secondo lo schema di Fig. 5.

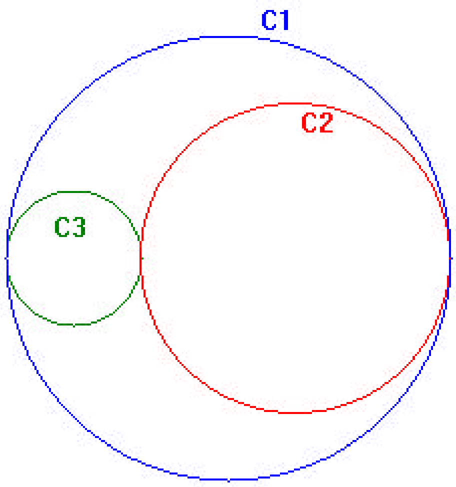


*Fig. 4*

Il problema, affrontato con gli strumenti della geometria analitica, non è facilmente risolubile poiché bisognerebbe impostare un sistema di equazioni abbastanza complesso; applicando il metodo dell'inversione, invece, è possibile giungere facilmente e rapidamente alla soluzione.

Se assumiamo come cerchio di inversione un cerchio *i* (Fig. 6) con centro nel punto di tangenza di C1 e C2, queste ultime si trasformeranno in due rette generiche non passanti per il centro di inversione (cfr. proprietà 2), mentre C3 si trasformerà in una circonferenza non passante per il centro (cfr. proprietà 3).

Abbiamo quindi trasformato il problema di partenza in un altro di più semplice soluzione: determinare le circonferenze tangenti ad una circonferenza e a due rette. È immediato a questo punto disegnare tali circonferenze e, applicando nuovamente l'inversione, ottenere la figura cercata.

Analogamente è anche facile inserire nella figura trasformata le circonferenze tangenti a C1 e C2 ed alle circonferenze via via disegnate e applicare nuovamente l'inversione per inserire le successive circonferenze tangenti all'interno dell'*arbelos*.

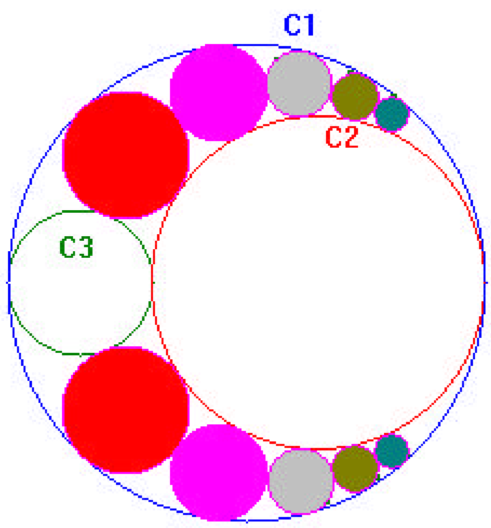


*Fig. 5*

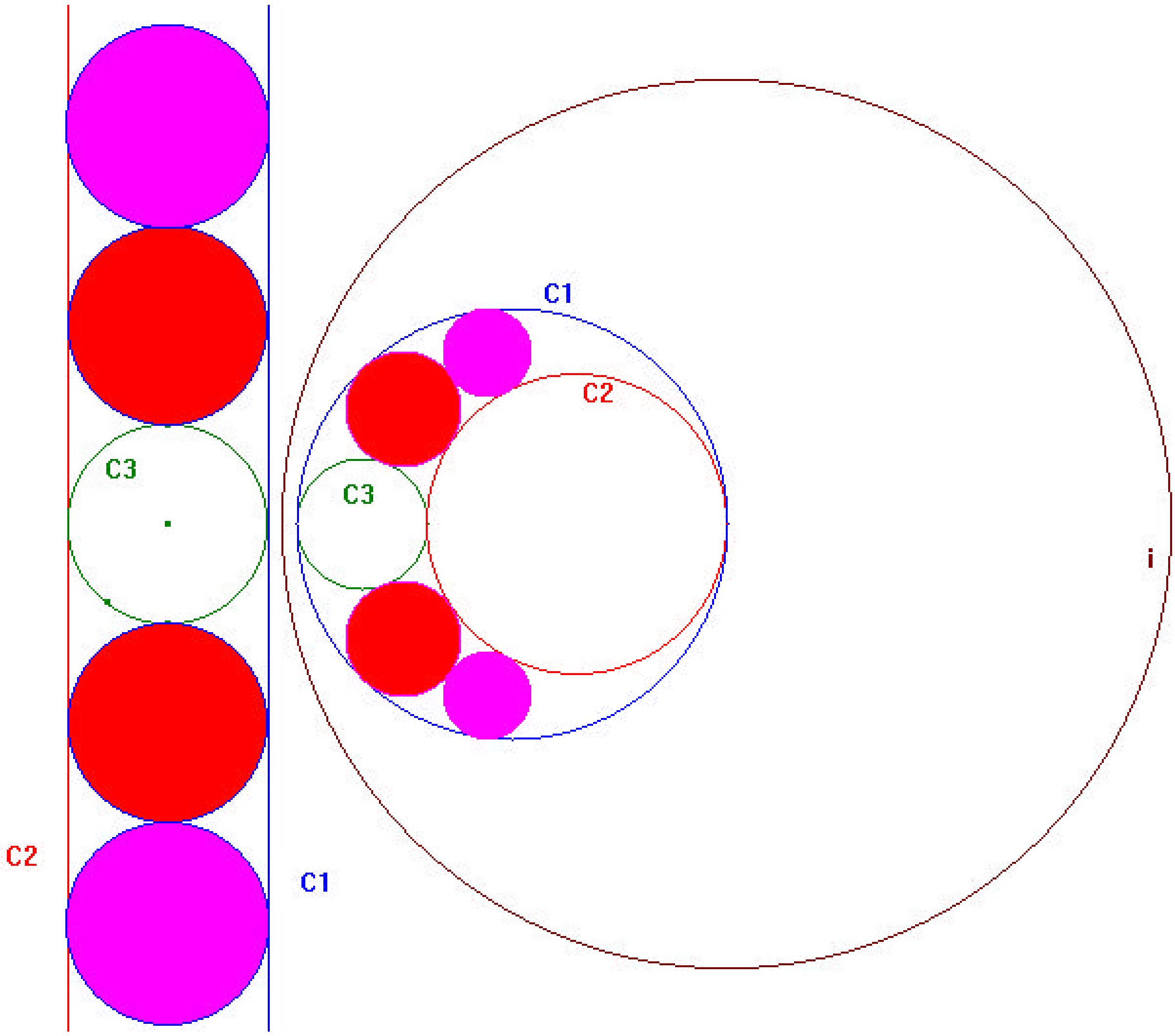


*Fig. 6*

Certamente si tratta di un metodo potente ed affascinante, ma poniamoci dal punto di vista dello studente: è così immediato comprendere che le due immagini in figura sono equivalenti?

Nella mente del discente l'inversione assume le sembianze di una scatola magica, nella quale entrano circonferenze ed escono rette e viceversa; da un lato essa stimola la curiosità, stupisce e sorprende i ragazzi per la rapidità di soluzione che è capace di offrire ad un problema apparentemente difficilissimo, dall'altro stabilisce tra due immagini una relazione che l'immaginazione coglie con difficoltà.

Come recuperare il concetto geometrico intuitivo nel caso del problema dell'*arbelos*? Ciò che l'intuito coglie con difficoltà è il fatto che una circonferenza, che è una curva di secondo grado con determinate caratteristiche (si svolge al finito, ha un centro rispetto a cui i punti della curva sono equidistanti, ha una curvatura diversa da zero) possa trasformarsi in una retta, che è una curva di primo grado con caratteristiche completamente diverse.

Riteniamo anche che l'argomento di tipo analitico riguardante la legge di inversione (secondo cui, in base alla $OP \cdot OP' = r^2$, se $OP = O$ allora $OP'$ non può essere finito) sia poco convincente e lasci l'intuito insoddisfatto ed incredulo. Può invece essere molto utile a nostro avviso il ricorso alla geometria dinamica, mostrando cioè come l'immagine inversa di una circonferenza possa ingrandirsi gradualmente fino a diventare una retta se un punto della circonferenza originaria si avvicina gradualmente al centro del cerchio di inversione (Fig. 7). Naturalmente il supporto cartaceo ci obbliga, per esigenze di spazio, a discretizzare il processo in cinque passi successivi, che tuttavia rendono chiaramente la continuità del passaggio dall'immagine iniziale a quella finale.

Questa applicazione, oltre a rispondere al problema posto dall'*arbelos* e dalla legge di inversione in generale, si collega al concetto di infinito matematico e di punto improprio e può essere utile per offrire un sostegno all'immaginazione che solitamente si affatica molto davanti a questi concetti.

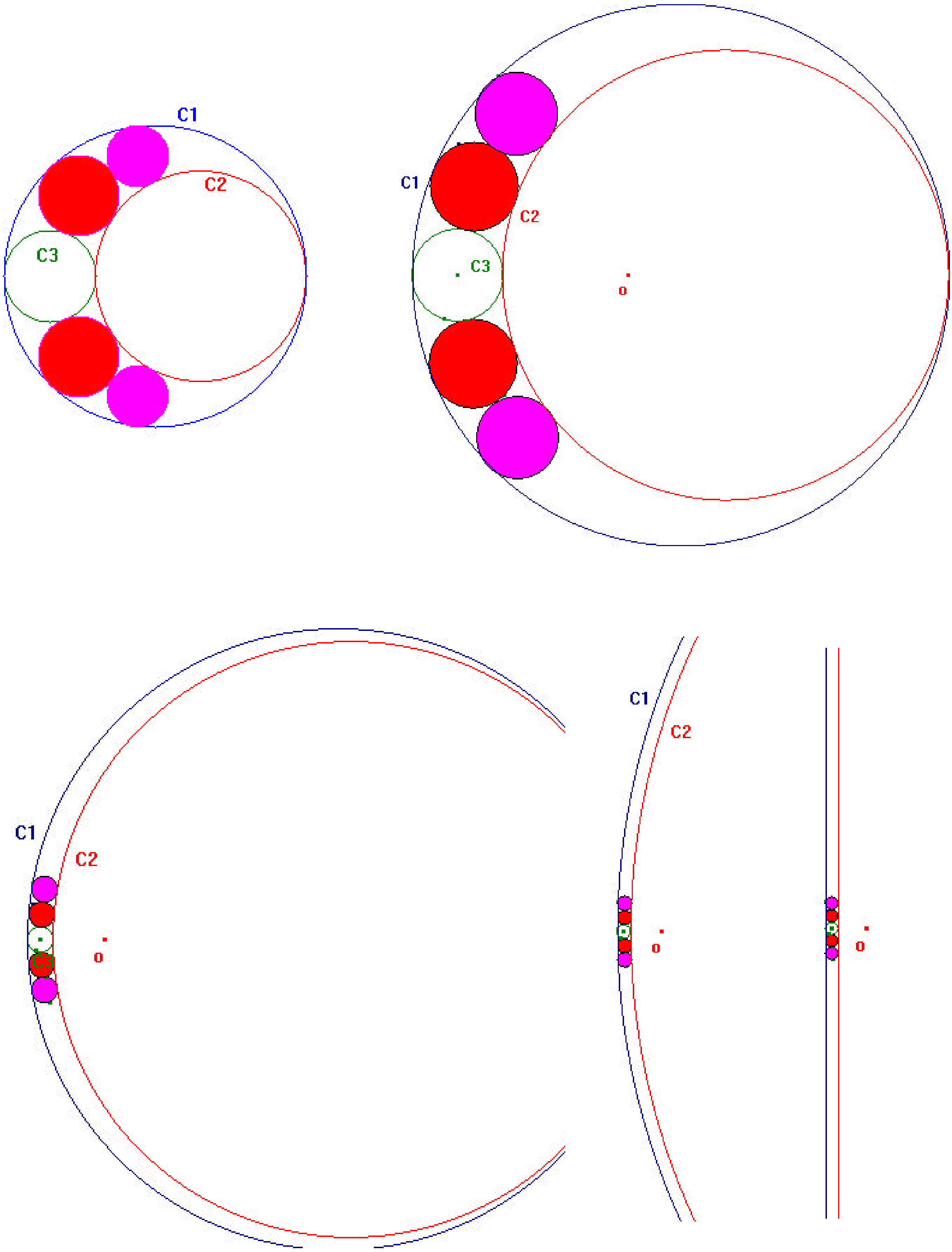


*Fig. 7*

# 4. Problem solving e gioco nelle trasformazioni e nelle costruzioni realizzate con software di geometria dinamica

Nella risoluzione fornita al problema dell'*arbelos* il software di geometria dinamica ha una parte determinante in quanto, oltre a **visualizzare in tempi brevissimi l'esito della trasformazione**, permette di:

1. **eseguire sperimentazioni** allo scopo di indagare il meccanismo della trasformazione e i possibili esiti;
2. percepire e comprendere meglio tale meccanismo grazie alla **componente dinamica**.

Un ulteriore aspetto didatticamente interessante dei software di geometria dinamica è quello che nelle costruzioni geometriche essi obbligano ad affrontare il problema secondo il processo dell'analisi, aiutando lo sviluppo ed il **potenziamento delle capacità di problem solving**.

## 4.1 Il recupero dell'intuizione e della sperimentazione nello studio della geometria

Nell'insegnamento della matematica e più in particolare della geometria, accanto alle componenti della razionalità e del rigore dimostrativo occorrerebbe lasciare più spazio per l'intuito e l'immaginazione.

David Hilbert, nella prefazione al *Geometria intuitiva* (1932), individua chiaramente questi due aspetti della matematica:

> *«In matematica, come in tutte le scienze, ci imbattiamo in due tendenze diverse: da una parte le tendenza astratta, che si propone di ricavare delle relazioni logiche dal molteplice materiale che ci sta a disposizione, quindi di ordinarlo e collegarlo in maniera sistematica; dall'altra, la tendenza intuitiva, che si propone piuttosto di giungere a una chiara percezione degli oggetti considerati e a una rappresentazione concreta delle loro relazioni reciproche.*
> *In particolare, in geometria, la tendenza astratta ha dato origine ai grandiosi edifici sistematici della geometria algebrica, della geometria riemanniana, della topologia, nei quali si applicano su vasta scala i metodi del ragionamento astratto, del simbolismo e del calcolo. Tuttavia si ascrive anche oggigiorno una grande importanza al concetto geometrico intuitivo, non solo per il suo alto valore euristico, ma anche perché esso ci permette di comprendere ed apprezzare meglio i risultati della ricerca scientifica».* [Curcio L., 1992:IV]

La struttura formale diventa talvolta un elemento di irrigidimento che soffoca l'originalità e la creatività del pensiero:

> *«Se le matematiche vengono così spesso riguardate come inutile peso dagli allievi, dipende in parte almeno dal carattere troppo formale che tende a prendere quell'insegnamento, da un falso concetto di rigore tutto intento a soddisfare certe minute esigenze di parole».* [Federigo Enriques, 1906, cit. in Brigaglia A., Indovina G., 2001]

L'intuito e l'immaginazione possono invece essere assunti come base per accostarsi in un secondo tempo agli aspetti formali, i quali in questo modo si configurano più che altro come sistemazione e rigorizzazione della conoscenza.

In vista di tale approccio all'insegnamento della geometria sono particolarmente utili i software di geometria dinamica come *Cabri-géomètre*. Software di questo tipo permettono di analizzare problemi di natura geometrica in modo per così dire "empirico", sperimentale, aiutando e sostenendo l'immaginazione e permettendo l'elaborazione di congetture cui poter dare successivamente una veste formale.

> «[Ma] *il ragionamento formale perfetto non è né l'unico, né, molte volte, il migliore modo per giungere alla verità. È ben spesso preferibile ricorrere ad un ragionamento approssimato, i cui passi successivi vengano sottoposti al riscontro dei fatti, per sceverare via via il vero dal falso, piuttosto che affidarsi ad una logica impeccabile, chiudendo gli occhi al mondo esterno»*. [Guido Castelnuovo, 1906, cit. in Brigaglia A., Indovina G., 2001]

La consuetudine di sperimentare e congetturare conferisce allo studio della geometria la dimensione del gioco, permettendo di recuperare quei processi empirici che stimolano l'attività cognitiva e la creatività, e di penetrare a fondo negli argomenti fino a gustarne l'intrinseca bellezza.

## 4.2 L'elemento dinamico e la percezione

Un altro elemento di grande rilievo didattico relativo ai software di geometria dinamica è quello del movimento: quest'aspetto, che a molti può sembrare puramente velleitario e marginale, si traduce in una diversa qualità di percezione e di rappresentazione interna delle relazioni e dei concetti, poiché le funzioni percettive e psichiche sono profondamente legate al movimento e al cambiamento:

> *«Ogni bambino impara a scuola che il movimento è qualcosa di relativo che si può percepire soltanto in rapporto a un punto di riferimento. Ma non tutti riescono a convincersi che questo principio vale praticamente per ogni percezione e quindi per ogni rapporto dell'uomo con la realtà.*
> *Ricerche sul cervello e sugli organi sensori hanno dimostrato in modo decisivo che possiamo percepire soltanto le relazioni e i modelli delle relazioni in cui si sostanzia la nostra esperienza. Se con un espediente blocchiamo il movimento dell'occhio, in modo che la stessa immagine continui ad essere percepita dalle stesse zone della retina, non si può più avere una chiara percezione visiva.*
> *Analogamente è difficile percepire un suono costante regolare; è anzi probabile che il suono diventi del tutto impercettibile. Se vogliamo farci un'idea della durezza e della trama di una superficie, non basta metterci sopra un dito ma bisogna farlo scorrere avanti e indietro, perché se non lo muoviamo non possiamo ricevere alcuna informazione utile, fuorché forse sulla temperatura che d'altronde dipenderebbe dalla differenza esistente tra la temperatura dell'oggetto e quella del dito. Possiamo fare molti altri esempi, ma tutti confermerebbero che in qualche modo le percezioni implicano un processo di cambiamento, movimento o scansione.*
> *In altre parole, sulla base di prove estremamente ampie, è stato possibile stabilire e astrarre una relazione che a nostro parere è identica al concetto matematico di funzione. Ne consegue che la sostanza delle nostre percezioni non è costituita da "cose", ma da funzioni; e […] le funzioni non sono grandezze isolate, ma "segni per un nesso… per un'infinità di situazioni possibili di uno stesso tipo…"»*. [Watzlawick, 1971: 17]

### 4.3 Il metodo *down-top* nei problemi di costruzione

I software di geometria dinamica per la costruzione delle varie procedure e sottoprocedure (macro) necessarie a realizzare graficamente un certo oggetto, "obbligano" gli studenti ad analizzare un problema di costruzione scindendolo in sottoproblemi e ad elaborare un progetto, una strategia; bisogna, infatti, articolare una costruzione complessa a partire da macro più semplici e queste a partire dalle procedure predefinite.

> *«Una costruzione geometrica richiede di ridurre costruzioni complesse a costruzioni più semplici. Questo metodo, che normalmente […] viene detto "down-top", non è altro che il metodo classico dell'analisi: per risolvere un problema si esegue una sorta di marcia indietro, per cui si sostituisce un problema (una costruzione) con uno più semplice, risolto il quale è risolto anche il problema iniziale; questa marcia indietro continua finché non sia raggiunto un problema (una costruzione) la cui soluzione è nota. A questo punto il problema è risolto. La soluzione (costruzione) effettiva viene svolta invertendo il senso di marcia, andando cioè dal semplice al complesso, effettuando quindi la sintesi del problema ("top-down")».* [Brigaglia A., Indovina G., 2001: 10]

Le strategie possibili, in generale, possono essere diverse in base al modo di approcciare il problema o, nel caso di costruzione geometrica, di "vedere" l'oggetto.

***Scheda 3*. Il metodo *down-top*: applicazione.**

*«Si voglia ad esempio utilizzare il CABRI o altro software di geometria dinamica per disegnare un oggetto semplice come questa stella:*

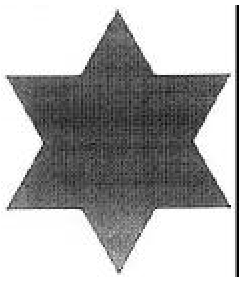

*Fig. 8*

*[…] occorre un "progetto" e prima ancora del progetto un'immagine mentale di ciò che si vuole costruire. […] Se ne possono avere molte e diverse, ciascuna porta ad una diversa strategia nella soluzione del problema.*

*Si può vedere la figura come composta da due "triangoli rovesciati" così :*

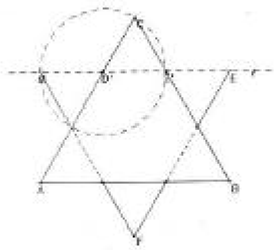

*Fig. 9*

*Allora la strategia della costruzione prevede di rispondere alle domande: «quali tipi di triangoli?», «Come sono i due triangoli uno rispetto all'altro?». A questo punto si può pensare che, attraverso misure o altro, si decida che i triangoli debbano essere equilateri e tra di loro uguali.*

*Ci si può porre la domanda: «so disegnare un triangolo equilatero?». Ho individuato un sottoproblema del problema originario […]. Una volta risolto il sottoproblema ho una macro "triangolo equilatero" […], ma ho un altro problema: «a che altezza porre il secondo triangolo?». Qualche misura potrebbe portare ad una risposta abbastanza rapida: il lato DE del secondo triangolo deve tagliare i lati AC e BC in punti che danno luogo alla terza parte della loro lunghezza.*

*Ma allora occorre dividere un segmento in tre parti uguali. Anche questo è un sottoproblema e anche questo può dar luogo ad una macro […]. Con questa macro si potrà individuare l'esatta collocazione del punto D'.*

*Si può anche constatare […] che DE deve anche essere parallelo ad AB. Occorre quindi saper tracciare la parallela r da un punto ad un segmento. Anche questo dà luogo ad una macro-sottoproblema.*

*[…] Qualcuno potrebbe constatare che CD'=D'D e quindi operare con la circonferenza di centro D' passante per C e costruire i punti D ed E' dove tale circonferenza interseca r. ora anche E si ottiene […] come simmetrico di D' rispetto a E' […].*

*Occorre ora realizzare il triangolo equilatero di lato dato, ricorrendo alla macro precedentemente definita.*

*Oltre a questa strategia risolutiva ne esistono tantissime altre, ognuna delle quali è legata ad un modo diverso di "vedere" la stella. A esempio iscritta in un esagono regolare.*

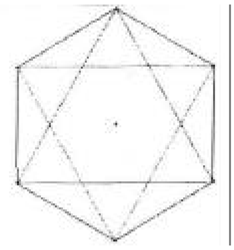

*Fig. 10*

*Ovvero come esagono "circondato" da sei triangoli equilateri:*

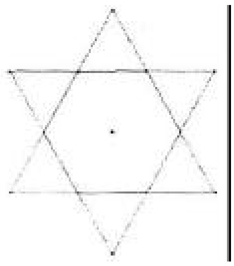

*Fig. 11*

*O ancora come un insieme di sei rombi collegati l'uno all'altro da una rotazione di 60°, così :*

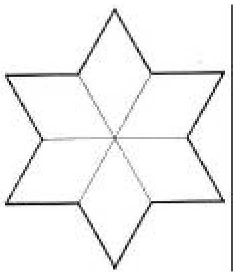

*Fig. 12*

*O infine come due triangoli tali che il secondo sia simmetrico del primo rispetto al circocentro:*

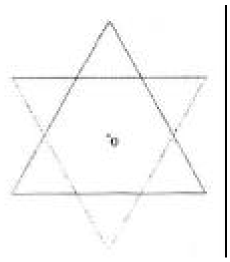

*Fig. 13*

*Come si vede le costruzioni geometriche pongono moltissimi problemi relativi al "problem solving" […].* [Brigaglia A., Indovina G., 2001:10]

## 4.4 I “software” di geometria dinamica del passato

*«La conoscenza dei metodi classici, in particolare dell’analisi e sintesi, aiuta molto ad impostare in modo corretto le moderne problematiche informatiche. Ancora una volta, a nostro avviso, vanno tenute presenti le profonde connessioni tra metodi del passato, classici, e metodi moderni o post-moderni, come talvolta si ama dire».* [Brigaglia A., Indovina G., 2001: 10]

Riguardo alle costruzioni geometriche e alle sperimentazioni con i software di geometria dinamica ciò che è possibile rintracciare nel passato non è solo il metodo dell’analisi, ma l’idea stessa di geometria dinamica e di uno strumento (anche se, come è ovvio, non di natura elettronica) che sia capace di realizzare figure geometriche.

Già nel primo Cinquecento, ad Urbino, troviamo officine per la costruzione di “macchine matematiche” per disegnare curve geometriche (ellissografi, parabolografi, inversori, biellismi, ecc.) nate dalla sinergia tra matematici e artigiani del tempo.

*«Ricordiamo le splendide costruzioni suggerite dagli strumenti di Francis van Schooten nel suo* De organica conicarum sectionum in plano descriptione*: vi troviamo ellissi, parabole e iperboli mirabilmente disegnate da delicati ed affascinanti attrezzi messi in funzione da lievi e magiche mani».* [Curcio L., 1992: I]

L’idea di una geometria dinamica, quindi, non nasce per la prima volta nel moderno contesto del software. Se si osserva il disegno in Fig.14, raffigurante le realizzazioni grafiche per mezzo di strumenti meccanici, è facile notare la sorprendente somiglianza con il logo del Cabri-géomètre (Fig. 15):

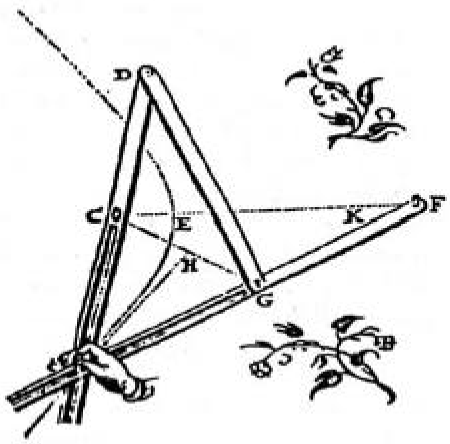


*Fig. 14*

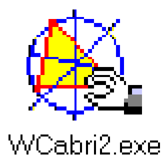


*Fig. 15*

I software odierni hanno rivestito di tecnologia strumenti matematici del passato e, come i loro antenati, offrono grandi possibilità in campo didattico. L’elaboratore diventa, allora, un mezzo di simulazione, capace di “riprodurre” lo strumento antico e il suo funzionamento.

## Bibliografia di riferimento

Brigaglia A., Indovina G. (2001), *La Geometria Dinamica come strumento educativo nella scuola dell'obbligo*, Dipartimento di Matematica Università di Palermo.

Curcio L., (1992), *Una la sorgente: il pensiero matematico!*, Dossier didattica: dagli strumenti ai modelli, Lettera Pristem, novembre n°6, Milano.

Polya G. (1967), *Come risolvere i problemi di matematica. Logica ed euristica nel metodo matematico*, Feltrinelli Editore, Milano.

Polya G. (1970), *La scoperta matematica. Capire imparare ed insegnare a risolvere i problemi*, volume secondo, Feltrinelli Editore, Milano.

Spagnolo F., (1998), *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria*, La Nuova Italia.

Tobias S., (1995), *Come vincere la paura della matematica*, terza ediz., Longanesi & C., Milano.

Watzlawick P. et al., (1971), *Pragmatica della comunicazione umana*, traduz. ital. Astrolabio, Roma.

## ALTROVE

L'uso dei software di geometria dinamica permette di recuperare il profondo legame esistente tra l'aspetto algebrico e quello geometrico le cui caratteristiche sono fondamentalmente diverse: pur avendo entrambi la possibilità di condurre alla rappresentazione del medesimo luogo, il primo fornisce un'immagine discreta, immobile, statica; il secondo permette una rappresentazione continua, mobile, dinamica. Dal recupero di questo legame, rileva Hilbert, nasce la possibilità «*di comprendere ed apprezzare meglio i risultati della ricerca scientifica*».

(PARAFRASARE)

Le rappresentazioni mentali dei concetti matematici possedute dal giocatore. Un gioco matematico può smascherare quelle concezioni difformi del discente che impediscono la comunicazione delle matematiche.

Il gioco contribuisce a suscitare interesse nei riguardi del pensiero matematico (finalità peraltro presente nei programmi ministeriali) proprio perché rende visibili i tentativi, gli errori, che conducono alla formalizzazione dei concetti e delle relazioni fra essi.

Esempi di utilizzo in classe del problem solving.
Questi momenti come interagiscono con l'attività della classe.
confrontare metodi, procedimenti, idee chiave, esplicitare.
Problema
Prerequisiti, situazioni problematiche, discussione il problema è più o meno adatto, età di destinazione.